



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36, 531.352

MSC 2010: 34C15, 34C20, 34C25

Об устойчивости резонансного вращения спутника на эллиптической орбите

Б. С. Бардин, Е. А. Чекина

Рассматривается задача об устойчивости резонансного вращения спутника относительно центра масс на эллиптической орбите. Резонансное вращение представляет собой плоское движение, при котором спутник, моделируемый твердым телом, вращаясь относительно одной из своих главных центральных осей инерции, направленной по нормали к плоскости орбиты, совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите. Устойчивость указанного резонансного вращения по отношению к плоским возмущениям, сохраняющим направление оси вращения спутника неизменным, была подробно исследована ранее. В данной работе исследуется устойчивость резонансного вращения спутника с неравными моментами инерции; при этом учитываются как плоские, так и пространственные возмущения. При малых значениях эксцентриситета получены аналитические выражения для границ областей неустойчивости (параметрического резонанса). При произвольных значениях эксцентриситета в плоскости параметров задачи численно построены области устойчивости в линейном приближении. Вне указанных областей резонансное вращение неустойчиво по Ляпунову.

Ключевые слова: гамильтонова система, резонансное периодическое движение, параметрический резонанс, спутник, устойчивость

Получено 28 сентября 2016 года

После доработки 07 ноября 2016 года

Исследование выполнено за счет средств гранта РНФ №14-21-00068 в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Бардин Борис Сабирович

bsbardin@yandex.ru

Чекина Евгения Алексеевна

chekina_ev@mail.ru

Московский авиационный институт

125871, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4

1. Постановка задачи

Рассмотрим спутник, движущийся в центральном ньютоновском гравитационном поле сил. Будем предполагать, что спутник является твердым телом, а его центр масс O движется по эллиптической орбите. Для описания движения спутника относительно центра масс введем две системы координат: орбитальную $OXYZ$ и жестко связанную со спутником $Oxyz$. Ось OX орбитальной системы координат направлена вдоль радиус-вектора центра масс спутника относительно притягивающего центра, а оси OY и OZ направлены по трансверсали к орбите и по нормали к плоскости орбиты соответственно. Оси связанной системы координат направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника.

Ориентацию осей связанной системы $Oxyz$ относительно орбитальной системы $OXYZ$ будем задавать при помощи углов Эйлера ψ , θ , ϕ . Вводя соответствующие безразмерные импульсы p_ψ , p_θ , p_ϕ , уравнения движения спутника можно записать в канонической форме с гамильтонианом [5]

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2} \frac{(\Theta_A \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) p_\psi^2}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \left(\frac{1}{2} \frac{\Theta_A \cos^2 \phi \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\Theta_A}{\Theta_C (1 + e \cos \nu)^2} + \left. \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \phi}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} \right) p_\phi^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{(\Theta_A \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) p_\theta^2}{(1 + e \cos \nu)^2} - \frac{\cos \theta (\Theta_A \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) p_\psi p_\phi}{\sin^2 \theta (1 + e \cos \nu)^2} - \\
 & - \frac{\cos \phi \sin \phi (\Theta_A - 1) p_\psi p_\theta}{\sin \theta (1 + e \cos \nu)^2} + \frac{\cos \theta \sin \phi \cos \phi (\Theta_A - 1) p_\phi p_\theta}{\sin \theta (1 + e \cos \nu)^2} - p_\psi + \\
 & + \frac{3}{2} (1 + e \cos \nu) \left(\frac{(\Theta_A - 1) (\cos \phi \cos \phi - \sin \phi \sin \phi \cos \theta)^2}{\Theta_A} + \frac{(\Theta_C - 1) \sin^2 \phi \sin^2 \theta}{\Theta_A} \right).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\Theta_A = A/B$, $\Theta_C = C/B$, A , B , C — главные центральные моменты инерции спутника относительно осей Ox , Oy , Oz соответственно, e ($0 < e < 1$) — эксцентриситет орбиты. Независимой переменной является истинная аномалия ν .

Если параметры Θ_A , Θ_C и e удовлетворяют соотношению

$$3(\Theta_C - \Theta_A) = -2e, \tag{1.2}$$

то канонические уравнения с гамильтонианом (1.1) имеют частное решение [6]

$$\psi^* = -\frac{1}{2} \nu, \quad p_\psi^* = \frac{1}{2} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{\Theta_A}, \quad \theta^* = \frac{1}{2} \pi, \quad p_\theta^* = 0, \quad \phi^* = 0, \quad p_\phi^* = 0. \tag{1.3}$$

Решение (1.3) описывает резонансное вращение спутника, при котором его главная центральная ось инерции Oy направлена по нормали к плоскости орбиты, а сам спутник совершает один оборот в абсолютном пространстве за два оборота центра масс по орбите. Далее предполагается, что соотношение (1.2) выполнено.

В работах [1–3] подробно исследовалась задача об устойчивости по Ляпунову данного резонансного вращение, при этом учитывались только плоские возмущения, то есть такие возмущения, при которых ось инерции Oy сохраняет неизменным свое направление

по нормали к плоскости орбиты. В работе [4] для динамически симметричного спутника исследовался вопрос об устойчивости резонансного вращения с учетом как плоских, так и пространственных возмущений. На основе нелинейного анализа почти для всех значений эксцентриситета были получены выводы о формальной устойчивости или об устойчивости для большинства начальных условий, либо была установлена неустойчивость.

В данной работе исследуется устойчивость резонансного вращения (1.3) несимметричного спутника. Исследование проводится в рамках линейного приближения, причем учитываются как плоские, так и пространственные возмущения.

2. Уравнения возмущенного движения в линейном приближении

В силу равенства (1.2) в задаче об устойчивости резонансного вращения (1.3) имеется два независимых параметра. В качестве таких параметров выберем эксцентриситет орбиты и новый инерционный параметр $\mu = 1/\Theta_A = B/A$. Введение параметра μ обусловлено тем, что, в отличие от параметров Θ_A и Θ_C , он имеет ограниченную область значений, определяемую неравенством

$$0 < \mu \leq \frac{6}{3 + 2e}, \quad (2.1)$$

которое является простым следствием неравенства треугольника для моментов инерции A, B, C . Область допустимых значений параметров задачи показана на рисунке 1.

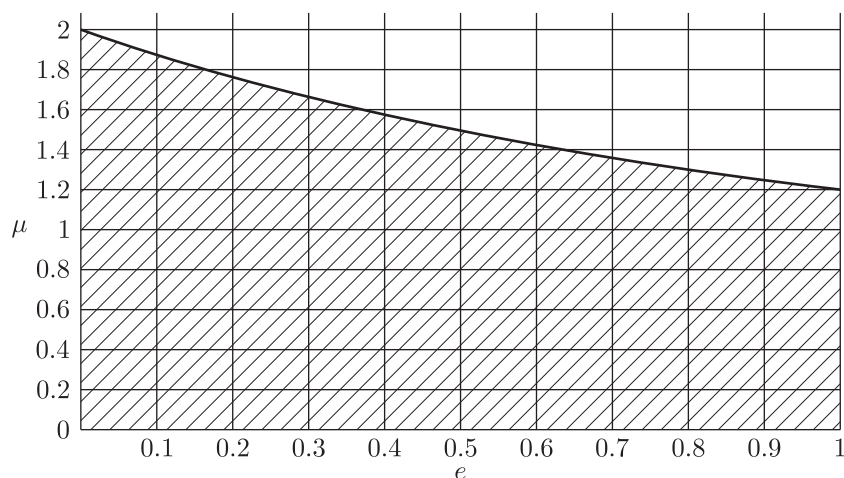


Рис. 1. Область допустимых значений параметров задачи.

Для описания движения в окрестности резонансного вращения (1.3) введем новые канонические переменные q_i, p_i ($i = 1, 2, 3$) по формулам

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^* + \frac{q_1}{1 + e \cos \nu}, & p_\psi &= p_\psi^* + \mu(1 + e \cos \nu) p_1 + e \mu \sin \nu q_1, \\ \theta &= \theta^* + \frac{q_2}{1 + e \cos \nu}, & p_\theta &= p_\theta^* + \mu(1 + e \cos \nu) p_2 + e \mu \sin \nu q_2, \\ \phi &= \phi^* + \frac{q_3}{1 + e \cos \nu}, & p_\phi &= p_\phi^* + \mu(1 + e \cos \nu) p_3 + e \mu \sin \nu q_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Каноническая замена переменных (2.2) имеет валентность μ^{-1} .

Переменные q_1, p_1 определяют плоские возмущения, а переменные q_2, p_2, q_3, p_3 — пространственные возмущения, то есть возмущения, при которых главная ось инерции Oy отклоняется от нормали к плоскости орбиты. Таким образом, в переменных q_i, p_i ($i = 1, 2, 3$) задача об устойчивости резонансного вращения (1.3) сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $q_i = p_i = 0$.

Разложим функцию Гамильтона в ряд в окрестности $q_i = p_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$):

$$H = H_2 + H_3 + \dots \quad (2.3)$$

Необходимая для линейного анализа устойчивости квадратичная часть разложения (2.3) имеет вид

$$H_2 = H_{21}(q_1, p_1, \nu) + H_{22}(q_2, q_3, p_2, p_3, \nu), \quad (2.4)$$

где

$$H_{21} = \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{2} \frac{e \cos \nu q_1^2}{1 + e \cos \nu}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} H_{22} = & \frac{1}{8\mu(1+e\cos\nu)^2} (6(\cos\nu-1)(e\cos\nu+1) + (e(5e-6)\cos^2\nu + \\ & + (4e^2+8e-6)\cos\nu - 4e^2+4e+7)\mu - 4e^2\mu^2(\cos^2\nu-1)) q_2^2 + \\ & + \frac{1}{2} \mu p_2^2 + \frac{1}{8\mu(1+e\cos\nu)^2(2e\mu-3)} (18(\cos\nu+1)(e\cos\nu+1) - \\ & - \mu(3e(11e+6)\cos^2\nu + 6(2e^2+6e+3)\cos\nu - 12e^2+12e+15) + \\ & + \mu^2(7e^2(2e+3)\cos^2\nu + 2e(8e+3)\cos\nu - 8e^3 - 12e^2 + 10e - 3) + \\ & + 2e\mu^3(1+e\cos\nu)^2) q_3^2 - 3 \frac{\mu p_3^2}{4e\mu-6} + \frac{e(\mu-1)\sin\nu q_2 p_2}{1+e\cos\nu} + \frac{1}{2} (\mu-1) q_3 p_2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{(e\mu^2+3\mu-3)\sin\nu q_2 q_3}{\mu(1+e\cos\nu)} + \frac{1}{2} p_3 q_2 - \frac{e(2e\mu+3\mu-3)\sin\nu q_3 p_3}{(1+e\cos\nu)(2e\mu-3)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Линейная каноническая система с гамильтонианом (2.4) распадается на две независимые канонические системы: систему с гамильтонианом (2.5), описывающую изменение переменных q_1, p_1 , и систему с гамильтонианом (2.6), описывающую изменение переменных q_2, p_2, q_3, p_3 . Таким образом, в рамках линейного приближения плоские и пространственные возмущения независимы.

Анализ устойчивости системы с гамильтонианом (2.5) был проведен в [2, 3], ниже мы воспользуемся результатами этого анализа. Исследование устойчивости системы с гамильтонианом (2.6) ранее не выполнялось.

3. Исследование устойчивости по отношению к пространственным возмущениям в линейном приближении при малых значениях эксцентриситета

Пусть орбита центра масс спутника является слабоэллиптической, то есть ее эксцентриситет $e \ll 1$. В этом случае, полагая e в качестве малого параметра задачи, исследование устойчивости можно выполнить аналитически.

В работе [2] было показано, что при малых значениях эксцентриситета резонансное вращение (1.3) устойчиво по отношению к плоским возмущениям. Исследуем его устойчивость по отношению к пространственным возмущениям. Для этого при помощи канонических преобразований переменных приведем функцию Гамильтона (2.6) к более простому виду, удобному для анализа устойчивости.

Выполним сначала следующую унивалентную каноническую замену переменных:

$$\begin{aligned} q_2 &= x_2 \cos \frac{\nu}{2} + x_1 \sin \frac{\nu}{2}, & p_2 &= \left(y_1 + \frac{1}{4} x_2\right) \sin \frac{\nu}{2} + \left(y_2 - \frac{1}{4} x_1\right) \cos \frac{\nu}{2}, \\ q_3 &= -x_2 \sin \frac{\nu}{2} + x_1 \cos \frac{\nu}{2}, & p_3 &= -\left(y_2 + \frac{1}{4} x_1\right) \sin \frac{\nu}{2} + \left(y_1 - \frac{1}{4} x_2\right) \cos \frac{\nu}{2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Новые переменные x_1, x_2, y_1, y_2 выбраны так, что при $e = 0$ функция Гамильтона (2.6) явно от ν не зависит. Ее разложение в ряд по степеням e имеет вид

$$H_{22} = H_{22}^{(0)} + e H_{22}^{(1)} + e^2 H_{22}^{(2)} + \dots, \quad (3.2)$$

где

$$H_{22}^{(0)} = \frac{1}{32\mu} (\mu^2 + 48\mu - 48) x_1^2 + \frac{1}{32} \mu x_2^2 + \frac{1}{4} (x_1 y_2 - x_2 y_1) (\mu - 4) + \frac{1}{2} \mu (y_1^2 + y_2^2), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} H_{22}^{(1)} &= \frac{1}{6} \mu^2 ((y_1^2 - y_2^2) \cos \nu + y_1^2 + y_2^2) - \frac{1}{12} \sin \nu (\mu^2 (x_1 y_1 - x_2 y_2) - \\ &- 12 (x_1 y_1 + x_2 y_2) (\mu - 1)) - \frac{1}{12} \mu^2 (\cos \nu (x_1 y_2 + x_2 y_1) - x_1 y_2 + x_2 y_1) + \\ &+ \frac{1}{48} (\mu^2 + 24) \sin \nu x_1 x_2 - \frac{1}{3} \mu^2 \sin \nu y_1 y_2 - \\ &- \frac{1}{96\mu} ((\mu^3 + 144\mu - 144) \cos \nu - \mu^3 - 48\mu) x_1^2 + \frac{1}{96} ((\mu^2 + 48) \cos \nu + \mu^2) x_2^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} H_{22}^{(2)} &= -\frac{1}{144\mu} [\mu^4 (\cos \nu - 1) + 12\mu^3 \sin^2 \nu - 72\mu^2 \sin^2 \nu - 72\mu (4 \cos^2 \nu - \\ &- \cos \nu - 1) + 216 \cos^2 \nu] x_1^2 - \frac{1}{72} [\sin \nu (12 (\mu^2 + 3) \cos \nu - \mu^3) x_2 - \\ &- 4 \sin \nu (6\mu^2 - \mu^3 + 6 (\mu^2 - 3\mu + 3) \cos \nu) y_1 - 4\mu^2 (\cos \nu - 1) (6 \cos \nu + \\ &+ 6 - \mu) y_2] x_1 - \frac{1}{144} (72 + \mu (\cos \nu + 1) (12 (\mu + 6) (\cos \nu - 1) - \mu^2)) x_2^2 + \\ &+ \frac{1}{18} [\mu^2 (\cos \nu + 1) (6 \cos \nu - 6 - \mu) y_1 - \sin \nu (6 (\mu^2 + 3\mu - 3) \cos \nu - \\ &- \mu^3 - 6\mu^2) y_2] x_2 + \frac{1}{9} (\cos \nu + 1) \mu^3 y_1^2 - \frac{2}{9} \mu^3 \sin \nu y_2 y_1 - \frac{1}{9} \mu^3 (\cos \nu - 1) y_2^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В предельном случае, когда орбита центра масс круговая ($e = 0$), резонансное вращение представляет собой цилиндрическую прецессию динамически симметричного спутника, а соответствующие пространственные возмущения в линейном приближении описываются канонической системой с гамильтонианом (3.3). Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda^4 + \left(\frac{1}{4} \mu^2 + 2\mu - 1\right) \lambda^2 + \frac{1}{4} (7\mu - 8) (\mu - 2) = 0. \quad (3.6)$$

Результаты исследования линейной задачи об устойчивости цилиндрической прецессии динамически симметричного спутника изложены в работе [5]; там же можно найти подробную библиографию по этому вопросу.

Отметим, что при $e = 0$ допустимые значения параметра μ , в силу неравенства (2.1), лежат в интервале $(0; 2]$. Для значений параметра $\mu \in (0, \mu_*) \cup (8/7; 2)$ (где $\mu_* = 0.9605453476890599$) уравнение (3.6) имеет корень с положительной вещественной частью. Поэтому для указанных значений μ резонансное вращение неустойчиво [7], причем неустойчивость будет иметь место как при $e = 0$, так и при достаточно малых, но отличных от нуля значениях e . Последнее следует из непрерывной зависимости правых частей линейной системы с гамильтонианом (3.2) от эксцентриситета e .

Если же $\mu \in (\mu_*; 8/7)$, то уравнение (3.6) имеет только чисто мнимые корни и при $e = 0$ система с гамильтонианом (3.2) устойчива в линейном приближении [7]. В этом случае линейной канонической заменой переменных $x_i, y_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$ ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, & x_2 &= b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2, \\ y_1 &= b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2, & y_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

гамильтониан (3.2) можно привести к виду

$$\tilde{H}_{22} = \frac{1}{2} \omega_1 (\xi_1^2 + \eta_1^2) - \frac{1}{2} \omega_2 (\xi_2^2 + \eta_2^2) + e \tilde{H}_{22}^{(1)} + e^2 \tilde{H}_{22}^{(2)} + O(e^3), \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\sqrt{|a - \sqrt{d}|}}{2}, & \omega_2 &= \frac{\sqrt{|a + \sqrt{d}|}}{2}, \\ d &= a^2 - 4b, & a &= \left(\frac{1}{4} \mu^2 + 2\mu - 1 \right), & b &= \frac{1}{4} (7\mu - 8)(\mu - 2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

а коэффициенты замены переменных (3.7) имеют вид

$$a_{1i} = \frac{1}{2} \frac{\kappa_i \mu}{\omega_i} (\mu - 2\omega_i^2 - 2), \quad a_{2i} = -\frac{1}{8} \frac{\kappa_i}{8\omega_i} (\mu - 4) (2\mu + \omega_i^2 - 2), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} b_{1i} &= \frac{1}{2} (-1)^i \kappa_i \mu (\mu - 4), & b_{2i} &= \frac{1}{8} (-1)^i \kappa_i (\mu (\mu - 4) + 8 - 8\omega_i^2), \\ \kappa_i &= \frac{\mu}{8\omega_i} (8\omega_i^4 + (\mu - 2)(\mu^2 - 8\omega_i^2 - 6\mu + 12)), & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Квадратичные формы $\tilde{H}_{22}^{(1)}$ и $\tilde{H}_{22}^{(2)}$ получаются подстановкой выражений (3.7) в (3.4) и (3.5) соответственно, их явный вид здесь не приводятся из-за громоздкости.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости резонансного вращения при $\mu \in [\mu_*; 8/7]$ и достаточно малых, но отличных от нуля значениях e . Если выполнено хотя бы одно из резонансных соотношений $2\omega_1 = n_1$, $2\omega_2 = n_2$ или $\omega_1 - \omega_2 = k$ (где n_1, n_2, k — некоторые целые числа), то при $e \neq 0$ в системе с гамильтонианом (3.2) возможно явление параметрического резонанса, приводящее к неустойчивости [8]. Указанные резонансные соотношения выполняются в двух внутренних точках интервала $(\mu_*; 8/7)$, а именно: в точке $\mu = 1$ реализуется кратный резонанс $2\omega_1 = 2$, $2\omega_2 = 1$, а в точке $\mu = \mu_{**} = 1.1019093218554929$ — комбинационный резонанс $\omega_1 - \omega_2 = -1$. Кроме того, на левой границе данного интервала ($\mu = \mu_*$)

имеет место резонансное соотношение $\omega_1 = \omega_2$, а на его правой границе ($\mu = 8/7$) — соотношение $\omega_1 = 0$.

В плоскости параметров (e, μ) из точек с координатами $(0, \mu_*)$, $(0, 1)$, $(0, \mu_{**})$, $(0, 8/7)$ исходят области неустойчивости. Если значение эксцентриситета мало, то границы указанных областей можно получить аналитически в виде сходящихся рядов по степеням e ,

$$\mu = \mu_0 + e\mu_1 + e^2\mu_2 + \dots, \quad (3.12)$$

где в качестве μ_0 следует положить одно из указанных выше резонансных значений: μ_* , 1 , μ_{**} или $8/7$. Коэффициенты μ_j ($j = 1, 2, \dots$) можно вычислить, например, методом, изложенным в работе [5]. Для этого необходимо подставить (3.12) в (3.8) и выполнить каноническую линейную 2π -периодическую замену переменных, приводящую функцию Гамильтона (3.8) к нормальной форме, не зависящей от ν . Такая нормализующая замена строится в виде сходящихся рядов по степеням e , коэффициенты которых можно последовательно находить, например, методом Депри – Хори [5]. Задача об устойчивости канонической системы с гамильтонианом (3.8) эквивалентна задаче об устойчивости нормализованной системы. Поскольку нормализованная система является автономной, то не представляет затруднений исследовать ее устойчивость и определить коэффициенты μ_j ($j = 1, 2, \dots$).

Вид нормализованной функции Гамильтона зависит от типа резонанса, поэтому каждый резонансный случай необходимо рассмотреть отдельно.

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки $(0, 1)$, положим в (3.12) $\mu_0 = 1$ и выполним 4π -периодическую замену переменных

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos \nu X_1 - \sin \nu Y_1, & \xi_2 &= \cos \frac{\nu}{2} X_2 + \sin \frac{\nu}{2} Y_2, \\ \eta_1 &= \sin \nu X_1 + \cos \nu Y_1, & \eta_2 &= -\sin \frac{\nu}{2} X_2 + \cos \frac{\nu}{2} Y_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

которая уничтожит в гамильтониане (3.8) члены, не зависящие от e . Теперь канонической близкой к тождественной заменой переменных $\xi_i, \eta_i \rightarrow X_i, Y_i$ функцию Гамильтона можно привести к следующему виду:

$$K_{22} = k_{2000}X_1^2 + k_{1010}X_1Y_1 + k_{0020}Y_1^2 + k_{0200}X_2^2 + k_{0101}X_2Y_2 + k_{0002}Y_2^2. \quad (3.14)$$

Коэффициенты нового гамильтониана (3.14) зависят только от параметров задачи и не зависят от ν , они представляются в виде сходящихся рядов по степеням e . Методом Депри – Хори были получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} k_{0020} &= e \left(\frac{7}{4} \mu_1 + \frac{7}{6} \right) - e^2 \left(18 \mu_1^2 + \frac{125}{6} \mu_1 - \frac{7}{2} \mu_2 + \frac{67}{9} \right) + O(e^3), & k_{1010} &= O(e^3), \\ k_{2000} &= e \frac{7}{4} \mu_1 - e^2 \left(18 \mu_1^2 - \frac{3}{2} \mu_1 - \frac{7}{2} \mu_2 \right) + O(e^3), \\ k_{0200} &= e \left(\frac{3}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \right) - e^2 \left(\frac{57}{2} \mu_1^2 + 17 \mu_1 - 3 \mu_2 + \frac{5}{2} \right) + O(e^3), & k_{0101} &= O(e^3), \\ k_{0002} &= e \left(\frac{3}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \right) - e^2 \left(\frac{21}{2} \mu_1^2 + 5 \mu_1 - 3 \mu_2 - \frac{1}{2} \right) + O(e^3). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Нетрудно показать, что на границе области неустойчивости характеристическое уравнение линейной системы с гамильтонианом (3.14) имеет по крайней мере два нулевых корня.

Из этого условия последовательно определяются величины μ_i . Итак, получаем следующие уравнения границ области неустойчивости (параметрического резонанса):

$$\mu_+ = 1 + O(e^3), \quad \mu_- = 1 - \frac{2}{3}e + \frac{4}{9}e^2 + O(e^3). \quad (3.16)$$

Здесь и далее через μ_+ обозначается верхняя (по параметру μ) граница области неустойчивости, а через μ_- — нижняя.

Заметим, что полученные выше формулы (3.16) для границ области неустойчивости можно уточнить, если учесть, что данные границы соответствуют случаю динамически симметричного спутника. При этом динамической симметрии $A = B$ соответствует верхняя граница, а динамической симметрии $B = C$ — нижняя. Поэтому асимптотические выражения (3.16) можно заменить точными

$$\mu_+ = 1, \quad \mu_- = \frac{3}{(3 + 2e)}. \quad (3.17)$$

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки $(0, \mu_{**})$, нужно в (3.12) положить $\mu_0 = \mu_{**}$ и выполнить 2π -периодическую замену переменных

$$\begin{aligned} \xi_1 &= X_1, & \xi_2 &= \cos \nu X_2 + \sin \nu Y_2, \\ \eta_1 &= Y_1, & \eta_2 &= -\sin \nu X_2 + \cos \nu Y_2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

приводящую гамильтониан (3.8) к виду

$$\Gamma_{22} = -\frac{1}{2}\omega_{**}(X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2) + O(e), \quad \omega_{**} = 0.2097075743251561, \quad (3.19)$$

а затем линейной близкой к тождественной 2π -периодической по ν канонической заменой переменных (построенной методом Депри–Хори) гамильтониан приводится к нормальной форме, не зависящей явно от ν . Не приводя промежуточных вычислений, выпишем уравнения границ областей неустойчивости, полученные на основании анализа корней характеристического уравнения канонической системы с нормализованной функцией Гамильтона:

$$\begin{aligned} \mu_+ &= \mu_{**} - 0.39564820916e + 0.51865636783e^2 - 0.38818378378e^3 + \\ &\quad + 0.40846785827e^4 + O(e^5), \\ \mu_- &= \mu_{**} - 0.41382122657e + 0.53200637935e^2 - 0.27448784825e^3 + \\ &\quad + 0.32770854616e^4 + O(e^5). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Вблизи граничных точек интервала $(\mu_*, 8/7)$ функция Гамильтона уже не приводится к виду (3.8), но использованная выше методика построения границ областей неустойчивости применима и в этих случаях.

Для построения границы области неустойчивости, исходящей из точки $(0, \mu_*)$, положим в (3.12) $\mu_0 = \mu_*$ и выполним замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.95588593618915477223\xi_2 - 0.032277479617649743\eta_1, \\ x_2 &= 1.0061966961098455678\xi_1 - 0.033976327216937882\eta_2, \\ y_1 &= -0.040793298297696656017\xi_1 + 1.0475273952102542624\eta_2, \\ y_2 &= -0.038753595876725391652\xi_2 + 0.99515006233436072407\eta_1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

нормализующую в гамильтониане (3.2) члены, не зависящие от e . В переменных ξ_i, η_i ($i = 1, 2$) функция Гамильтона принимает вид

$$\tilde{H}_{22} = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \omega_* (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) + e \tilde{H}_{22}^{(1)} + O(e^2), \quad (3.22)$$

где $\omega_* = 0.7588651186541301966$.

Линейной близкой к тождественной 2π -периодической канонической заменой переменных $\xi_i, \eta_i \rightarrow X_i, Y_i$ ($i = 1, 2$) функция Гамильтона (3.22) приводится к виду

$$K_{22} = \frac{1}{2} (1 + 2k_{2000})(X_1^2 + X_2^2) + k_{0020}(Y_1^2 + Y_2^2) + \omega_*(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + k_{1010} X_1 Y_1 + k_{0110} X_2 Y_1. \quad (3.23)$$

Гамильтониан (3.23) не зависит явно от ν и является аналитической функцией параметра e . Методом Депри – Хори можно вычислить разложения коэффициентов $k_{2000}, k_{0020}, k_{1010}, k_{0110}$ в ряды по e до сколь угодно высокого порядка. В первом приближении по e имеем следующие выражения для коэффициентов:

$$k_{2000} = e \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(u(\nu) + h_{2000}^{(1)} + h_{0200}^{(1)} \right) d\nu + O(e^2), \quad (3.24)$$

$$k_{0020} = e \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(h_{0020}^{(1)} + h_{0002}^{(1)} \right) d\nu + O(e^2), \quad (3.25)$$

$$k_{1010} = e \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2z(\nu) + h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} \right) d\nu + O(e^2), \quad (3.26)$$

$$k_{0110} = e \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(h_{0110}^{(1)} - h_{1001}^{(1)} \right) d\nu + O(e^2), \quad (3.27)$$

где

$$z(\nu) = \int_0^\nu \left(h_{0020}^{(1)} - h_{0002}^{(1)} \right) d\nu - \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(h_{0020}^{(1)} + h_{0002}^{(1)} \right) d\nu, \quad (3.28)$$

$$u(\nu) = \int_0^\nu \left(2z + h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} \right) d\nu - \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2z + h_{0101}^{(1)} + h_{1010}^{(1)} \right) d\nu.$$

Уравнение границы области неустойчивости получается на основании анализа корней характеристического уравнения канонической системы с нормализованной функцией Гамильтона (3.23). Не приводя промежуточных вычислений, выпишем его явный вид с точностью до членов пятой степени по e

$$\mu = \mu_* - 0.307549121658 e - 0.516112650718 e^2 + 0.362028557898 e^3 - 0.0223315330946 e^4 - 0.148718160532 e^5 + O(e^6). \quad (3.29)$$

Действуя аналогично, можно получить границу области неустойчивости, исходящую из точки $(0, 8/7)$. Для этого нужно положить в (3.12) $\mu_0 = 8/7$ и выполнить замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{79} \sqrt{3} \sqrt{158} \xi_2 - \frac{20}{79} 79^{1/4} \sqrt{2} \eta_1, & x_2 &= \frac{2}{79} 79^{3/4} \sqrt{2} \xi_1 - \frac{20}{237} \sqrt{3} \sqrt{158} \eta_2, \\ y_1 &= \frac{5}{316} 79^{3/4} \sqrt{2} \xi_1 + \frac{29}{948} \sqrt{3} \sqrt{158} \eta_2, & y_2 &= \frac{5}{316} \sqrt{3} \sqrt{158} \xi_2 + \frac{29}{316} 79^{1/4} \sqrt{2} \eta_1, \end{aligned} \quad (3.30)$$

приводящую гамильтониан (3.2) к виду

$$\tilde{H}_{22} = \frac{1}{14} \sqrt{79} (\xi_1^2 + \eta_1^2) - \frac{1}{2} \eta_2^2 + e \tilde{H}_{22}^{(1)} + O(e^2). \quad (3.31)$$

Далее, аналогично рассмотренным выше резонансным случаям, вычисляется нормальная форма гамильтониана, которая явно от ν не зависит. В результате анализа корней характеристического уравнения канонической системы с нормализованной функцией Гамильтона было получено следующее уравнение границы области неустойчивости:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{8}{7} - \frac{64}{147} e + \frac{9196}{15435} e^2 - \frac{126656}{324135} e^3 - \frac{266721795196877}{700920220455000} e^4 + \\ &+ \frac{524416524132554}{1839915578694375} e^5 + O(e^6). \end{aligned} \quad (3.32)$$

4. Исследование устойчивости по отношению к пространственным возмущениям при произвольных значениях параметров

Пусть теперь параметры задачи принимают любые (не обязательно малые) допустимые значения. В общем случае вопрос об устойчивости линейной периодической системы решается на основании анализа корней ее характеристического уравнения [5, 7].

Обозначим через $\mathbf{X}(\nu)$ фундаментальную матрицу решений линейной системы с гамильтонианом (2.6), удовлетворяющую начальными условиями $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_4$, где \mathbf{E}_4 — единичная матрица четвертого порядка. Характеристическое уравнение этой системы имеет следующий вид:

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0. \quad (4.1)$$

Коэффициент a_1 — след матрицы монодромии $\mathbf{X}(2\pi)$, а коэффициент a_2 — сумма главных миноров второго порядка этой матрицы.

Если выполнены неравенства [9]

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2/4, \quad (4.2)$$

то уравнение (4.1) имеет две пары комплексно-сопряженных корней, модули которых равны единице. В этом случае линейная система с гамильтонианом (2.6) устойчива. Неравенства (4.2) задают в плоскости коэффициентов a_1 и a_2 ограниченную область (криволинейный треугольник). Если значения коэффициентов не удовлетворяют неравенствам (4.2) и при этом точка (a_1, a_2) не принадлежит границе указанной области, то характеристическое уравнение (4.1) имеет по крайней мере один корень, модуль которого больше единицы,

и линейная система с гамильтонианом (2.6) неустойчива. Более того, в этом случае из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению следует неустойчивость и полной нелинейной системы с гамильтонианом (2.3). Последнее, очевидно, означает неустойчивость по Ляпунову резонансного вращения (1.3). В общем случае (при произвольных значениях параметров задачи) матрица монодромии $\mathbf{X}(2\pi)$ может быть получена только численно. В данной работе задавались конкретные значения параметров e и μ и путем численного интегрирования линейной системы с гамильтонианом (2.6) определялась матрица монодромии $\mathbf{X}(2\pi)$, затем вычислялись коэффициенты a_1 и a_2 и на основании неравенств (4.2) делались выводы об устойчивости или неустойчивости. При этом параметры выбирались из области их допустимых значений с шагом 0.001.

Результаты проведенного анализа устойчивости представлены на рисунке 2. В областях, закрашенных серым цветом, имеет место неустойчивость рассматриваемой линейной системы и, как следствие, неустойчивость резонансного вращения (1.3). В областях, обозначенных белым цветом, линейная система с гамильтонианом (2.6) устойчива. Отметим, что на рисунке 2 изображена не вся область допустимых значений параметров, а только ее часть, соответствующая значениям μ из интервала $[0.85, 1.15]$, где расположены области устойчивости. Расчеты показали, что для значений μ вне указанного интервала неравенства (4.2) не выполняются и линейная система с гамильтонианом (2.6) неустойчива.

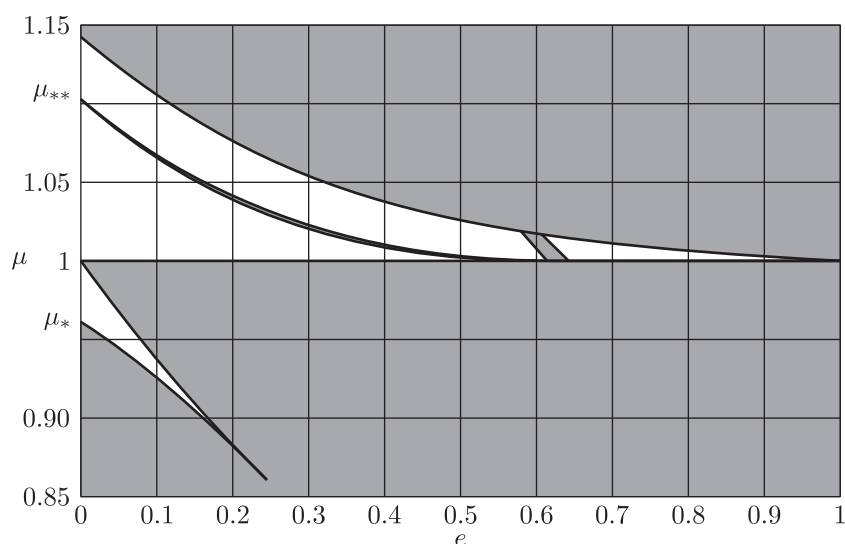


Рис. 2. Области неустойчивости и области устойчивости в линейном приближении системы с гамильтонианом (2.6).

Представленные на рисунке 2 результаты численного анализа устойчивости хорошо согласуются с результатами анализа устойчивости, полученными аналитически в параграфе 3 для малых значений e . В частности, сравнение этих результатов показало, что, в рамках полученного приближения, формулы (3.16), (3.20), (3.29), (3.32) позволяют аппроксимировать границы областей неустойчивости при всех, а не только при малых значениях e . Другими словами, анализ полученных результатов показал, что для любого фиксированного значения e из интервала $(0, 1)$ разность между значением μ , вычисленным на границе области неустойчивости численно, и значением μ , полученным по приближенной формуле, не превосходит величины остаточного члена этой приближенной формулы.

5. Результаты линейного анализа устойчивости с учетом плоских и пространственных возмущений

Как уже было отмечено выше, исследование устойчивости линейной системы с гамильтонианом (2.5), описывающей плоские возмущенные движения, было выполнено в [2, 3]. В частности, в работе [3] были найдены следующие интервалы значений эксцентриситета e , для которых эта линейная система неустойчива:

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_1 &= [0.32173093; 0.90010166], \\ \mathbb{U}_2 &= [0.91790987; 0.99054502], \\ \mathbb{U}_3 &= [0.99211417; 0.99916660], \\ \mathbb{U}_4 &= [0.99930356; 0.99991879], \end{aligned} \quad (5.1)$$

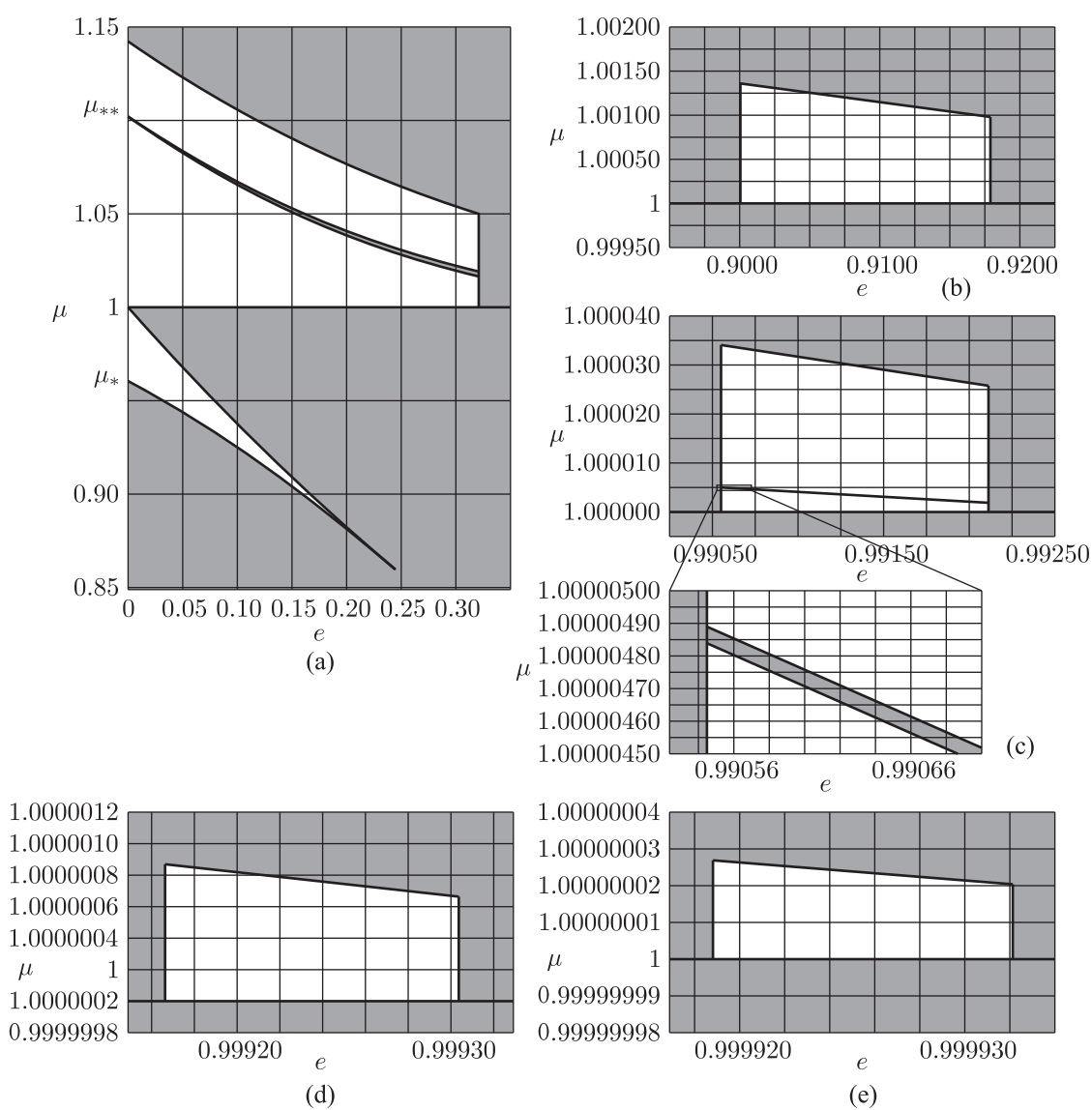


Рис. 3. Области устойчивости в линейном приближении.

а также интервалы устойчивости в линейном приближении резонансного вращения (1.3) по отношению к плоским возмущениям

$$\begin{aligned} S_1 &= [0; 0.32173093], \\ S_2 &= [0.90010166; 0.91790987], \\ S_3 &= [0.99054502; 0.99211417], \\ S_4 &= [0.99916660; 0.99930356], \\ S_5 &= [0.99991879; 0.99993212]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

После объединения этих результатов с результатами, полученными в параграфе 4, были построены области устойчивости резонансного вращения (1.3) в линейном приближении с учетом как плоских, так и пространственных возмущений. Эти области изображены на рисунке 3. Отметим, что исследование устойчивости проводилось для значений эксцентриситета e из интервала $[0, 0.99994]$. При значениях e , достаточно близких к единице, проведение численного анализа становится затруднительным. Это связано с тем, что при $e = 1$ в правых частях уравнений возмущенного движения имеется сингулярность.

Все области устойчивости, за исключением одной из двух, изображенных на рисунке 3а, представляют собой криволинейные трапеции, основания которых лежат на прямой $\mu = 1$, а их боковые стороны — вертикальные отрезки, проходящие через граничные точки соответствующих интервалов устойчивости (5.2). При приближении эксцентриситета e к единице размер областей устойчивости уменьшается. Две области устойчивости, изображенные на рисунке 3а и рисунке 3с, пересекаются узкими областями неустойчивости.

Список литературы

- [1] Хентов А. А. Об одном вращательном движении спутника // Космические исследования, 1984, т. 22, № 1, с. 130–131.
- [2] Маркеев А. П., Бардин Б. С. Плоские вращательные движения спутника на эллиптической орбите // Космические исследования, 1994, т. 32, № 6, с. 43–49.
- [3] Bardin B. S., Chekina E. A., Chekin A. M. On the stability of a planar resonant rotation of a satellite in an elliptic orbit // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 1, pp. 63–73.
- [4] Bardin B. S., Chekina E. A. On stability of a resonant rotation of a symmetric satellite in an elliptic orbit // Regul. Chaotic Dyn., 2016, vol. 21, no. 4, pp. 377–389.
- [5] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 396 с.
- [6] Белецкий В. В., Шляхтин А. Н. Резонансные вращения спутника при взаимодействии магнитных и гравитационных полей: Препринт № 46. Москва: Институт прикладной математики АН СССР, 1980. 30 с.
- [7] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.
- [8] Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. Москва: Наука, 1987. 328 с.
- [9] Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах // Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: АН СССР, 1954. С. 327–401.

On the stability of a resonant rotation of a satellite in an elliptic orbit

Boris S. Bardin¹, Evgeniya A. Chekina²

^{1,2}Moscow Aviation institute

Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125871, Russia

¹bsbardin@yandex.ru, ²chekina_ev@mail.ru

We deal with the problem of stability for a resonant rotation of a satellite. It is supposed that the satellite is a rigid body whose center of mass moves in an elliptic orbit. The resonant rotation is a planar motion such that the body completes one rotation in absolute space during two orbital revolutions of its center of mass. The stability analysis of the resonant rotation with respect to planar perturbations has been performed in detail earlier. In this paper we investigate the stability of the resonant rotation with respect to both planar and spatial perturbations for a nonsymmetric satellite. For small values of the eccentricity we have obtained boundaries of instability domains (parametric resonance domains) in an analytic form. For arbitrary eccentricity values we numerically construct domains of stability in linear approximation. Outside the above stability domains the resonant rotation is unstable in the sense of Lyapunov.

MSC 2010: 34C15, 34C20, 34C25

Keywords: Hamiltonian system, resonant periodic motion, parametric resonance, satellite, stability

Received September 28, 2016, accepted November 07, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 619–632 (Russian)